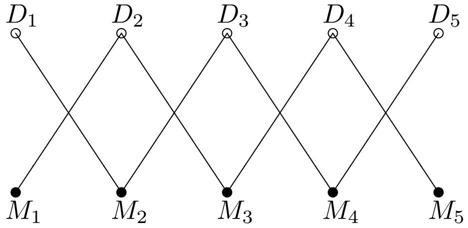
Холова теорема

верзија 1.2.1: 14.6.2016.

Душан Ђукић

Претпоставимо да имамо пет девојака D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 и пет момака M_1, M_2, M_3, M_4, M_5. Девојци D_1 се свиђа само момак M_2, девојци D_2 се свиђају момци D_1 и D_3, девојци D_3 се свиђају M_2 и M_4, девојци D_4 се свиђају M_3 и M_5, а девојци D_5 се свиђа само M_4. Да ли је могуће удати све девојке за момке који им се свиђају? Графички то изгледа овако:



Видимо да је одговор *не*: трима девојкама D_1, D_3, D_5 се у унији допадају само двојица момака, M_2 и M_4.

С друге стране, ако претпоставимо да се девојка D_1 напрасно заљуби у момка M_3, имаћемо савршено спаривање: $D_1 - M_3$, $D_2 - M_1$, $D_3 - M_2$, $D_4 - M_5$ и $D_5 - M_4$.

Наведено питање се може формулисати и у облику теорије графова. Горња слика приказује бипартитан граф са теменима $D_1, \dots, D_5$ и $M_1, \dots, M_5$, а савршено спаривање одговара избору 5 дисјунктних грана (тј. никоје две гране немају заједничко теме).

Нека је G коначан бипартитан граф са партицијом темена $A \cup B$. Под *спаривањем* у графу G (или спаривањем скупа A са скупом B) подразумевамо скуп дисјунктних грана графа. Поставља се питање под којим условима постоји спаривање које покрива цео скуп A (у случају $|A| = |B|$ ово ће бити *савршено спаривање*). Следећа теорема даје одговор. Јасно је зашто се она често зове "Теорема о венчању".

Холова[1] *теорема.* Нека је G коначан бипартитан граф са партицијом темена $A \cup B$. За сваки скуп X темена из A, означимо са $F(X)$ скуп свих темена у B која су спојена граном са неким теменом из X.

Спаривање које покрива цео скуп A постоји ако и само ако важи $|F(X)| \geqslant |X|$ за сваки скуп $X \subseteq A$.

Доказ. Смер "само ако" је очигледан: ако је $|F(X)| < |X|$, онда ниједно спаривање не може покрити X. Други смер доказујемо индукцијом по $n = |A|$. Случај $|A| = 1$ је тривијалан. За $|A| > 1$ разликујемо два случаја.

(i) $|F(X)| > X$ за свако $X \subsetneq A$. Одаберимо било које теме $a \in A$ и спаримо га с било којим суседом $b \in B$. Сада свако $X \subseteq A \setminus \{a\}$ има бар $|F(X)| - 1 \geqslant |X|$ суседа у $B \setminus \{b\}$, па по индуктивној претпоставци постоји спаривање целог скупа $A \setminus \{a\}$ са $B \setminus \{b\}$, што даје и спаривање A са B.

(ii) $|F(X_0)| = X_0$ за неко $X_0 \subseteq A$. По индуктивној претпоставци постоји савршено спаривање између X_0 и $F(X_0)$. Остаје да споримо $A \setminus X_0$ са скупом $B \setminus F(X_0)$. Нека је $X \subseteq A \setminus X_0$. Како елементи скупа $X \cup X_0$ имају бар $|X \cup X_0| = |X| + |X_0|$ суседа у B, бар $|X|$ од ових суседа је у скупу $B \setminus F(X_0)$. Сада је довољно да применимо индуктивну претпоставку на граф са теменима $A \setminus X_0$ и $B \setminus F(X_0)$. $\square$

[1] Philip Hall (1904-1982), енглески математичар

Задаци

1. За $0 \leqslant k \leqslant 2n+1$, са S_k означавамо скуп свих k-елементних подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$. Доказати да постоји бијекција $f : S_n \to S_{n+1}$ таква да важи $A \subset f(A)$ за свако $A \in S_n$.

2. Дата су два квадратна листа папира површине 1000. Сваки папир је оловком подељен на 1000 делова површине 1. Један папир је стављен директно изнад другог. Доказати да је могуће побости 1000 игала тако да је сваки од 2000 делова прободен.

3. Имамо шпил од 52 карте за игру (13 вредности у 4 боје). Шпил је произвољно подељен у 13 група од по 4 карте. Доказати да је могуће узети по једну карту из сваке групе тако да свих 13 вредности буду заступљене.

4. Деда Мраз носи бар n поклона за n деце. За $i = 1, 2, \ldots, n$, тачно x_i од ових поклона би се допало i-том детету. Ако је $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} < \frac{n}{n-1}$, доказати да Деда Мраз може сваком детету да дâ по један поклон који му се допада.

5. Дата је бинарна таблица $n \times n$. Претпоставимо да сваки скуп од n поља таблице, међу којима никоја два нису у истој врсти или колони, садржи бар једну јединицу. Доказати да је за неке p и q са $p+q > n$ могуће одабрати p врста и q колона таблице тако да се у пресецима ових врста и колона налазе само јединице.

6. Нека су m и n ($m \leqslant n$) природни бројеви. *Латински правоугаоник* $m \times n$ је правоугаона $m \times n$ таблица бројева $1, 2, \ldots, n$ таква да су у свакој врсти или колони сви бројеви различити.

   Ако је $m < n$, доказати да се сваки латински правоугаоник $m \times n$ може допунити до латинског квадрата $n \times n$.

7. Нека је $\mathcal{F}$ фамилија подскупова скупа X. Кажемо да је скуп $A \subset X$ *добар* ако има непразан пресек са сваким скупом из фамилије $\mathcal{F}$. Претпоставимо да сваки добар скуп има бар n елемената; нека су A и B два n-елементна добра скупа. Доказати да се ови скупови могу написати као $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ тако да за свако $i = 1, \ldots, n$ постоји скуп из фамилије $\mathcal{F}$ који садржи a_i и b_i.

8. У разреду има 42 ученика. Међу произвољних 31 ученика постоје бар једна девојчица и један дечак који се познају (познанство је узајамно). Доказати да постоји 12 различитих девојчица $a_1, \ldots, a_{12}$ и 12 различитих дечака $b_1, \ldots, b_{12}$ таквих да се a_i и b_i познају за све i.

9. *Рупичасти троугао* је једнакостраничан троугао странице n с врхом горе, подељен на n^2 јединичних троглова, из кога је изрезано n јединичних троуглова с врхом горе. *Дијамант* је јединични ромб са оштрим углом $60°$. Доказати да се рупичасти троугао T може поплочати дијамантима ако и само ако сваки једнакостранични троугао странице k у T с врхом на горе садржи највише k рупа, за свако $k = 1, 2, \ldots, n$.

10. У графу са $3n$ темена, темена се могу поделити у три комплетна n-графа, али не постоји комплетан $(n+1)$-граф. Доказати да се темена овог графа могу обојити у $[\frac{5n}{3}]$ боја тако да никоја два темена исте боје нису спојена граном.

11. Врсте и колоне квадратне табле $3n \times 3n$ су означене бројевима $1, 2, \ldots, 3n$. Свако поље (x, y) са $1 \leqslant x, y \leqslant 3n$ је обојено зеленом, плавом, односно жутом бојом када $x+y$ даје остатак $0, 1$ или 2 редом при дељењу са 3. По један жетон зелене, плаве или жуте боје је постављен на свако поље, тако да буде по $3n^2$ жетона у свакој боји.

    Претпоставимо да се жетони могу пермутовати тако да сваки зелени жетон дође на место плавог, плави на место жутог и жути на место зеленог, а да притом растојање сваког жетона од полазне позиције не буде веће од d поља. Доказати да је онда такође могуће пермутовати жетоне тако да свако поље и жетон на њему имају исту боју, а да притом растојање сваког жетона од полазне позиције не буде веће од $d+2$.

12. Нека је X коначан скуп и $\mathcal{F}$ фамилија подскупова скупа X затворена у односу на подскупове (тј. ако $A \in \mathcal{F}$ и $B \subset A$, онда $B \in \mathcal{F}$). Доказати да постоји бијекција $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ таква да за свако $A \in \mathcal{F}$ важи $A \cap f(A) = \emptyset$.

13. Нека су a и n природни бројеви такви да је $a > (n-1)!$. Доказати да постоје различити прости бројеви $p_1, \ldots, p_n$ такви да $p_i \mid a + i$ за све $i = 1, 2, \ldots, n$.

Решења

1. Посматрајмо граф чија темена одговарају скуповима из $S_n \cup S_{n+1}$, при чему су темена $A \in S_n$ и $B \in S_{n+1}$ спојена граном ако је $A \subset B$. Да бисмо доказали да постоји савршено спаривање скупа S_n са скупом S_{n+1}, довољно је да докажемо да су задовољени услови Холове теореме.

   Нека је $T \subset S_n$ и T' фамилија скупова у S_{n+1} који садрже бар један од скупова из T. Сваки скуп у T' садржи највише $n+1$ скупова из T; с друге стране, сваки скуп из T је садржан у највише $n+1$ скупова из T' - одавде следи $|T'| \geqslant |T|$, тј. услов Холове теореме је задовољен.

2. Посматрајмо граф G са 2000 темена која одговарају многоугловима у подели, у коме су два темена повезана граном ако одговарајући многоуглови припадају различитим папирима и могу се истовремено пробости једном иглом. Произвољан скуп од k многоуглова са једног листа папира покрива површину k, па према томе сече бар k многоуглова са другог листа. Овим су задовољени услови Холове теореме, тако да имамо савршено спаривање, а оно одговара траженом постављању игала.

3. Посматрајмо бипартитни граф $G = X \cup Y$ у коме темена у X представљају 13 вредности карата, а темена у Y 13 група. Темена $x \in X$ и $y \in Y$ су спојена граном ако група y садржи бар једну карту вредности x. Треба да покажемо да G има савршено спаривање.

   За произвољан подскуп $T \subset X$ означимо са $s(T)$ скуп темена у Y која су суседна неком темену из T. У $s(T)$ су оне групе карата које садрже бар једну карту са вредношћу из T, а пошто таквих карата има $4|T|$, оваквих група има бар $|T|$, па је $|s(T)| \geqslant |T|$, тј. задовољени су услови Холове теореме.

4. Треба показати да постоји спаривање деце са поклонима, тј. да су задовољени услови Холове теореме. Претпоставимо да ти услови нису задовољени, што значи да постоји скуп S деце којима се у унији допада мање од $|S|$ поклона. Тада је $\sum_{i \in S} \frac{1}{x_i} \leqslant \sum_{i \in S} \frac{1}{|S|-1} = \frac{|S|}{|S|-1} \geqslant \frac{n}{n-1}$, што је контрадикција.

5. Посматрајмо бипартитни граф чија су темена врсте $a_1, \ldots, a_n$ и колоне $b_1, \ldots, b_n$, при чему су темена a_i и b_j спојена граном ако се у пресеку i-те врсте и j-те колоне налази нула.

   Претпоставимо да тражених p врста и $n+1-p$ колона не постоји. То значи да, за свако p и произвољних p врста постоји бар i колона које у пресеку са њима садрже бар по једну нулу, тј. које су са теменима која одоварају овим врстама спојена граном. Дакле, претпоставке Холове теореме су задовољене, па постоји n дисјунктних парова врста-колона у чијим пресецима су нуле, противно претпоставци.

6. Показаћемо да је увек могућа допуна до латинског правоугаоника $(m+1) \times n$. Понављањем поступка можемо га допунити до квадрата.

   Посматрамо граф G са партицијом темена $A \cup B$, где темена у A представљају n колона таблице, а темена у B бројеве $1, \ldots, n$. Колона c и број i су спојени ако се i не налази у колони c. Потребно је наћи савршено спаривање скупова A и B.

У графу G свако теме има степен $n-m$ (у колони недостаје $n-m$ бројева, и сваки број се не појављује у $n-m$ колона). Према томе, ако је $X \subseteq A$ произвољан скуп k колона, између X и $F(X) \subseteq B$ има $k(n-m)$ грана, али како свако теме у $F(X)$ има степен $n-m$, следи $|F(X)| \geqslant k$, те је услов Холове теореме задовољен.

7. Нека су $a \in A$ и $b \in B$ спојени граном ако постоји скуп $C \in \mathcal{F}$ такав да $a, b \in C$. Тражи се савршено спаривање скупова A и B. За произвољан подскуп $S \subset A$ означимо са $t(S)$ скуп елемената скупа B који су спојени граном са неким елементом из A. Скуп $(A \setminus S) \cup t(S)$ је добар, па има бар n елемената, одакле је $|t(S)| \geqslant |S|$, тј. задовољени су услови Холове теореме.

8. Нека је A скуп девојчица и B скуп дечака у разреду. По услову задатка је $|A|+|B| = 42$ и $|A|, |B| \leqslant 30$.

   Приметимо да за сваки непразан скуп девојчица S постоји највише $30-|S|$ дечака који не познају ниједну девојчицу из S (у супротном бисмо имали скуп од 31 ученика у коме се ниједан дечак и девојчица не познају). Дакле, има бар $|B|-(30-|S|) = |S|+12-|A|$ дечака који познају бар једну девојчицу из S.

   Сада ћемо додати у разред скуп C са $|A|-12$ нових дечака ("казанова") који познају све девојчице. У овом проширеном разреду задовољени су услови Холове теореме, па постоје дисјунктни парови (a_i, b_i) са $a_i \in A$ и $b_i \in B \cup C$ у којима се a_i и b_i познају. Бар 12 од ових $|A|$ парова не садржи ниједног казанову.

9. Нека су G и D редом скупови јединичних троуглова окренутих на горе и доле. Два троугла су *суседи* ако чине дијамант. За $A \subseteq D$ означимо са $F(A)$ скуп суседа елемената скупа A.

   Ако се рупичасти троугао може поплочати дијамантима, сваки троугао странице k с врхом горе садржи $\frac{k(k-1)}{2}$ елемената скупа D, па мора садржати бар исто толико елемената скупа G и највише k рупа.

   За други смер доказаћемо да су задовољени услови Холове теореме, тј. да важи $|F(X)| \geqslant |X|$ за сваки скуп $X \subset D$. Тада можемо да "оженимо" елементе скупа D преосталим елементима скупа G (тако да брачни парови чине дијаманте). Претпоставимо супротно, да је $|F(X)| < |X|$ за неко X. Како свака два елемента из D са заједничким суседом имају заједничко теме, довољно је да посматрамо повезане скупове X. Посматрајмо троугао странице 3 с врхом горе. Он садржи три елемента из D; ако су два од њих у X, додавањем трећег у X, $F(X)$ се увећава за највише 1, па $|F(X)| < |X|$ и даље важи. Настављајући овај поступак по потреби можемо да претпоставимо да је X скуп свих елемената скупа D унутар неког троугла с врхом горе, а знамо да је то немогуће. Према томе, $|F(X)| \geqslant |X|$ за свако $X \subset D$.

10. Означимо полазни граф са G, а три комплетна n-графа из услова задатка са A, B и C. Посматрајмо комплементни граф $\overline{G}$. Део графа $\overline{G}$ над деловима A и B задовољава услове Холове теореме - заиста, у супротном би у G постојао комплетан $(n+1)$-граф. Према томе, у $\overline{G}$ постоји савршено спаривање делова A и B; аналогно, спаривање постоји и између A и C, као и између B и C.

    Посматрајмо гране ових спаривања. Те гране се разбијају на циклове дужина дељивих са 3. Међу тим цикловима, троуглове (тј. њихова темена) бојимо једном бојом, циклове дужине $2k$ са k боја, а циклове дужине $2k+1$ са $k+1$ боја. Овако смо за сваки цикл дужине m користили не више од $\frac{5m}{9}$ боја, што укупно даје највише $\frac{5n}{3}$ боја.

11. Означимо зелена поља са a_i, плава са b_i и жута са c_i, $i = 1, \ldots, 3n^2$. Претпостављаћемо притом да приликом пермутовања жетона a_i долази на место b_i, а c_i долази на место a_i. Нека u_i означава тројку $\{a_i, b_i, c_i\}$ за $i = 1, 2, ..., 3n^2$. Даље, поделимо таблицу $3n \times 3n$ на $3n^2$ вертикалних правоугаоника 1×3 и означимо са v_i тројку поља у i-том правоугаонику.

Сада ћемо посматрати бипартитан граф са теменима u_i и v_j $(1 \leqslant i, j \leqslant 3n^2)$ у коме су тројке u_i и v_j спојене граном ако имају заједничко поље. Сваки скуп U са m тројки има бар m суседа јер је за покривање његових $3m$ поља потребно бар m тројки v_j. По Холовој теореми постоји савршено спаривање између тројки u_i и v_j. Видимо да, ако су тројке u_i и v_j спојене, онда можемо да жетон са поља a_i померимо на поље у $u_i \cap v_j$, на растојању највише d, а затим и на поље одговарајуће боје у v_j, чиме је тај жетон прешао пут не дужи од $d+2$. Слично поступамо и са преостале две боје.

12. По Холовој теореми, довољно је доказати да за свако $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ постоји бар $|\mathcal{C}|$ скупова из фамилије $\mathcal{F}$ који су дисјунктни са бар једним скупом из $\mathcal{C}$. Ово тврђење ћемо доказати индукцијом по $|X|$. За $|X| = 1$ оно је тривијално.

    Одаберимо $x \in X$. За свако $A \subset X$ дефинишимо $A' = A \setminus \{x\}$ и посматрајмо фамилије $\mathcal{F}' = \{A' \mid A \in \mathcal{F}\}$ и $\mathcal{F}'_x = \{A' \mid A \in \mathcal{F},\ x \in A\}$. Јасно је да су и ове две фамилије затворене у односу на подскупове и $\mathcal{F}'_x \subset \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$.

    Нека је $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, $|\mathcal{C}| = m$. претпоставимо да $\mathcal{C}$ садржи тачно k скупова A за које $A' \in \mathcal{C}$, тј. $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, при чему је $A_{m-k+i} = A'_i$ за $1 \leqslant i \leqslant k$. По индуктивној претпоставци за $\mathcal{F}'$ постоје подскупови $B_1, \dots, B_{m-k} \in \mathcal{F}'$ такви да је $A_i \cap B_i = \emptyset$ за $1 \leqslant i \leqslant m-k$. С друге стране, на основу индуктивне претпоставке за $\mathcal{F}'_x$ можемо да претпоставимо да су $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{F}'_x$. Тако можемо да узмемо $B_{m-k+i} = B_i \cup \{x\} \in \mathcal{F}$ за $1 \leqslant i \leqslant k$, те тада заиста имамо $A_i \cap B_i = \emptyset$ за све $i = 1, \dots, m$.

13. Нека је $A = \{a+1, a+2, \dots, a+n\}$ и нека је P скуп свих простих делилаца бројева из A. Конструишимо бипартитан граф са ивицама које спајају бројеве скупа A са њиховим простим делиоцима у P, и докажимо да овај граф задовољава услове Холове теореме.

    Претпоставимо супротно, тј. да постоји подскуп $A' = \{a+i_1, ..., a+i_k\}$ скупа A који је спојен само са простим бројевима $p_1, ..., p_l$ $(l < k)$. За свако $i = 1, \dots, l$ означимо број из A' који је дељив највећим степеном броја p_i. Пошто је $l < k$, у A' постоји неозначен број, рецимо $a + i_k$. Следи да $a + i_k \mid (a+i_1) \cdots (a+i_{k-1})$. Посматрањем по модулу $a + i_k$ добијамо да $a + i_k$ дели $(i_1 - i_k) \cdots (i_1 - i_{k-1}) < n! < a + i_k$, што је немогуће.

Београд, 2015-2016